数理解析研究所講究録
394巻 1980年 82-98

Subregular singularities in a symmetric space

都立大 理　関口 次郎
都立大 理　清水 保弘

$\mathbb{C}^3$ 内の次の代数曲面は、原点のみに孤立特異点を持ち、有理二重点と呼ばれている。これらの曲面は、特異点の minimal resolution の例外ファイバーのグラフが A, D, E 型の Dynkin diagram になることから興味が持たれてきた。

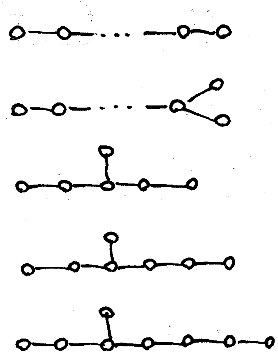
$x^{\ell+1} + yz = 0 \quad \longleftrightarrow \quad A_\ell$

$x^{\ell-1} + xy^2 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad D_\ell$

$x^4 + y^3 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad E_6$

$x^3y + y^3 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad E_7$

$x^5 + y^3 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad E_8$



この関係は、Lie 環との内在的関係を暗示しているが、実際、Brieskorn は、Nice Congress ('70) の報告で、有理二重点が、実際に対応する型の単純 Lie 環内に構成できることを示した。さらに、Slodowy [11] は、多重線分の現われる Dynkin 図形に対応する Lie 環 (B_ℓ, C_ℓ, F_4, G_2 型) で

も、Brieskornの結果は成立することを示した。その際、現われる特異点は次の式で表わされる。

B_ℓ : $x^{2\ell}+y^2+z^2=0$ （$A_{2\ell-1}$ 型有理二重点）

C_ℓ : $x^\ell+xy^2+z^2=0$ （$D_{\ell+1}$ 〃 〃 〃）

F_4 : $x^4+y^3+z^2=0$ （E_6 〃 〃 〃）

G_2 : $x^3+y^3+z^2=0$ （D_4 〃 〃 〃）

そして、多重線分のDynkin図形は、一重線分のみのDynkin図形を"折り畳んで"得られると解釈すれば、上の結果は理解できることを示した。

ところで、有理二重点のversal deformationを考える：

A_ℓ : $x^{\ell+1}+yz+\xi_2x^{\ell-1}+\xi_3x^{\ell-2}+\cdots+\xi_\ell x+\xi_{\ell+1}=0$

B_ℓ : $x^{2\ell}+y^2+z^2+\xi_2x^{2\ell-2}+\xi_4x^{2\ell-4}+\cdots+\xi_{2\ell-2}x^2+\xi_{2\ell}=0$

C_ℓ : $x^\ell+xy^2+z^2+\xi_2x^{\ell-1}+\cdots+\xi_{2\ell-2}x+\xi_{2\ell}=0$

D_ℓ : $x^{\ell-1}+xy^2+z^2+\xi_2x^{\ell-2}+\cdots+\xi_{2\ell-4}x+\xi_{2\ell-2}+\xi'_\ell y=0$

E_6 : $x^4+y^3+z^2+\xi_2x^2y+\xi_5xy+\xi_6x^2+\xi_8y+\xi_9x+\xi_{12}=0$

E_7 : $x^3y+y^3+z^2+\xi_2x^4+\xi_6x^3+\xi_8xy+\xi_{10}x^2$
$\quad +\xi_{12}y+\xi_{14}x+\xi_{18}=0$

E_8 : $x^5+y^3+z^2+\xi_2x^3y+\xi_8x^2y+\xi_{12}x^3$
$\quad +\xi_{14}xy+\xi_{18}x^2+\xi_{20}y+\xi_{24}x+\xi_{30}=0$

F_4 : $x^4+y^3+z^2+\xi_2x^2y+\xi_6x^2+\xi_8y+\xi_{12}=0$

G_2 : $x^3+y^3+z^2+\xi_2xy+\xi_6=0$

後に、この versal deformation のリストを単に「リスト」として引用する。

我々の出発点は、「リスト」の表示式が持っている対称性（symmetry）に注目することであった。

A_ℓ ： $y \leftrightarrow z$（変数の互換）で式は不変

D_ℓ ： $z \leftrightarrow -z$（変数の符号反転）で式は不変

$E_\ell\ (\ell=6,7,8)$ ： $z \leftrightarrow -z$

B_ℓ ： $z \leftrightarrow -z$ および $x \leftrightarrow -x$

C_ℓ ： $z \leftrightarrow -z$ および $y \leftrightarrow -y$

F_4 ： $z \leftrightarrow -z$ および $x \leftrightarrow -x$

G_2 ： $z \leftrightarrow -z$ および $x \leftrightarrow y$.

Dynkin 図形が多重線を持つ、B_ℓ, C_ℓ, F_4, G_2 型の場合では"本質的に異なる" symmetry が少なくとも２種類存在することは特に注目に値する。

本稿は、Brieskorn - Slodowy 理論の類似を（局所）対称空間上で展開し、これらの symmetry を Cartan involution を用いて説明することが目的である。

§1. Brieskorn - Slodowy 理論

以後、特に断わらない限り、$\mathfrak{g}$ は複素単純 Lie 環，G は $\mathfrak{g}$ の adjoint group（内部自己同型群），$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の（１つ固定した）Cartan 部分環，ℓ は $\mathfrak{g}$ の階数 $\mathrm{rank}(\mathfrak{g})$ $(=\dim\mathfrak{h})$,

W は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の Weyl 群とする。

$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ は、$\mathfrak{g}$ 上の複素数値多項式関数全体のつくる環，$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ は，G-不変式全体のつくる部分環を表わす。同様に，$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$，$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ を定義する。$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の元を，$\mathfrak{h}$ 上に制限することにより，準同型 $\mathrm{rest}: \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ を定義する。

<u>定理</u>（Chevalley，Harish-Chandra）

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \arrow[r, "\mathrm{rest}"] & \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \\ \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{rest}"] & \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

は可換図式であって、

(i) $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \xrightarrow[\mathrm{rest}]{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$　(algebra isomorphism)

(ii) $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ は，$\xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_\ell}$　$(\ell = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g})$ という，ℓ 個の代数的独立な斉次生成元を持つ（n_i は ξ_{n_i} の次数とする）。

$\xi_{n_1}|_{\mathfrak{h}}, \cdots, \xi_{n_\ell}|_{\mathfrak{h}}$ は，$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ の代数的独立な斉次生成元になる訳だが，これは幾何的には，$\mathfrak{h}/W$ が ℓ 次元アフィン空間 $(\mathbb{A}^\ell)$ になることを示しており，$\xi_{n_1}|_{\mathfrak{h}}, \cdots, \xi_{n_\ell}|_{\mathfrak{h}}$ はその上の座標関数と考えられる。そこで，$\mathfrak{h}/W$ の点と，座標 $(\xi_{n_1}|_{\mathfrak{h}}, \cdots, \xi_{n_\ell}|_{\mathfrak{h}})$ とを同一視して次の写像を定義する。

<u>定義</u>（invariant morphism）

$$\begin{array}{cccc} \chi: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{h}/W \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & X & \longmapsto & (\xi_{n_1}(X), \cdots, \xi_{n_\ell}(X)) \end{array}$$

invariant morphism χ は，$\mathfrak{g}$ が A_l 型単純 Lie 環（$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$）のときには，ちょうど固有方程式の係数を対応させる写像になっているが，いくつか注意をしておく。まず，χ は intrinsic には次のようにして定義される：$X = X_s + X_n$ を Jordan 分解とする（X_s は半単純部分，X_n は巾零部分）。$G \cdot X_s$（X_s を通る G 軌道）は $\mathfrak{h}$ と何点かで交わるが，その交点は W の作用で互いに移り合うので，X_s に対して，$\mathfrak{h}/W$ の元 $\overline{X_s}$ が一意に定まる。そこで $\chi(X) = \overline{X_s} \in \mathfrak{h}/W$ が invariant morphism を表わすのである。$\xi_{n_i}(X) = \xi_{n_i}(\overline{X}_s)$ と考えられるので，これを座標表示したものが，前ページに与えた定義に他ならない。

$0 \in \mathfrak{h}/W$ の逆像 $\chi^{-1}(0)$ は，$\mathfrak{g}$ の巾零元（nilpotent element）全体 $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ と一致している。

さて，$\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ については，次の結果が得られている。

> 定理（Kostant）
>
> $$X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \Longrightarrow \dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = l + 2k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$
>
> ここに $Z_{\mathfrak{g}}(X) = \{ Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \}$ とする。

$\dim Z_{\mathfrak{g}}(X)$ は，X を通る G 軌道 $G \cdot X$ の $\mathfrak{g}$ 内での余次元と考えられる。

さらに，注目すべき巾零元の族が2つある。それは次の結果をもとに定義される。

<u>定理</u>（Kostant，Steinberg，Dynkin）

(i) $\dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = l$ なる $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は存在し、かつ、かかる X の全体は単一の G-軌道をなす。

(ii) $\dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = l+2$ なる $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は存在し、かつ、かかる X の全体は単一の G-軌道をなす。

(i) を満たす nilpotent element を <u>regular nilpotent element</u> とよび、その全体を（単一の G-軌道）、$\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g})$ で表わす。(ii) を満たすのを <u>subregular nilpotent element</u> とよび、その全体（単一の G-軌道）を $\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})$ で表わす。

これらの準備の後に、Brieskorn - Slodowy の結果は次のように定式化される。

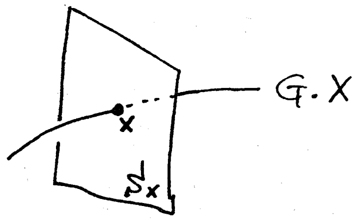
<u>定理</u>（Brieskorn - Slodowy）

$\mathfrak{g}$ を $A_l \sim G_2$ いずれかの型の単純 Lie 環とし、$X \in \mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})$ を任意にとり、$\mathcal{S}_X$ を X における $G.X = \mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})$ への transversal slice（後注）とする。また $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}/W$ を invariant morphism とし、χ の $\mathcal{S}_X$ への制限を $\chi_{\mathcal{S}_X}$ で表わす。このとき

(i) $\chi_{\mathcal{S}_X}^{-1}(0) = \mathcal{S}_X \cap \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は、$\mathfrak{g}$ に対応する型の「リスト」の有理二重点（$\xi = 0$ としたもの）に biholomorphic である。

(ii) $\xi = (\xi_{m_1}, \cdots, \xi_{m_l}) \in \mathfrak{h}/W$ に対し、$\chi_{\mathcal{S}_X}^{-1}(\xi)$ は (i) に対する「リスト」の versal deformation に biholomorphic である。

（注） S_x は次のように構成される。まず、X における G-軌道 $G\cdot X$ への接空間 $T_x(G\cdot x)$ は $\{[X,Y] \mid Y\in\mathfrak{g}\}$ と同一視できるので、$\mathfrak{g}$ におけるその補空間 N_x を1つとり、アフィン部分空間 $S_x = x + N_x$ を構成する。



S_x は必要ならば、x のまわりの近傍だけに限って考察する場合もあり得る。そのときには、定理の(i)(ii)の主張は、「biholomorphic」を「locally biholomorphic」に置き換えればよい。

§2. 局所対称空間, Cartan involution

$\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie 環, θ を $\mathfrak{g}$ の位数2の自己同型とする。$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\theta(X)=X\}$, $\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\theta(X)=-X\}$ とおくと、$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の部分環, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の（部分環ではない）部分空間となり、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ は直和分解を与える。この分解を複素化された Cartan 分解とよび、θ を複素化された Cartan involution, $\mathfrak{p}$ を複素化された局所対称空間とよぶ。

Remark：通常の実単純 Lie 環の Cartan 分解については Helgason [7] を参照。ここでの状況では、$\mathfrak{k}$ が非コンパクト型実 Lie 環の複素化になっている場合も込めて考えてしまう。また、局所対称空間という用語は、まだ広くは用いられていないが、$\mathfrak{g}$ の adjoint group G の、$\mathfrak{k}$ に対応する analytic subgroup をKとするとき、複素化された対称空間 G/K の単位元（の剰余類）における接空間と $\mathfrak{p}$ とが同一視できることから用いる。以後、煩わしいので「複素化された」という形容は省くが、誤解なきよう。大切な状況は、G の $\mathfrak{g}$ への adjoint action を K に制限することで、K は $\mathfrak{p}$ に作用することである。我々は「$K \curvearrowright \mathfrak{p}$」という状況で、Brieskorn と Slodowy の結果に相当するものを考えたい。ただし、一般の $\mathfrak{p}$ ではまだ不明で、$\mathfrak{g}$ に非常に似ている $\mathfrak{p}$ として次の概念を想定する。

<u>定義</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とするとき、$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分環 $\mathfrak{a}$ が、$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環になっているならば、この分解（あるいは局所対称空間 $\mathfrak{p}$）を <u>normal type</u> であるという。

<u>補題1</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が normal type の Cartan 分解ならば、 $\dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{k} = \mathrm{rank}(\mathfrak{g}) = \ell$.

まず、$\mathfrak{p}$ 内の nilpotent element というものを考える必要があるが、それについては、次の結果を得る。

<u>補題2</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を normal type の Cartan 分解とする。このとき、

(i) $\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} \neq \phi$, $\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} \neq \phi$

(ii) $\forall X \in \mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ に対して

$$\dim Z_{\mathfrak{k}}(X)=0,\quad \dim Z_{\mathfrak{p}}(X)=\ell$$

(iii) $^{\forall}X\in \mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$ に対して

$$\dim Z_{\mathfrak{k}}(X)=1,\quad \dim Z_{\mathfrak{p}}(X)=\ell+1$$

ここに、$Z_{\mathfrak{k}}(X)=\{Y\in\mathfrak{k}\mid [X,Y]=0\}$, $Z_{\mathfrak{p}}(X)=\{Y\in\mathfrak{p}\mid [X,Y]=0\}$

補題2は、§1 の Kostant の結果に相当するもので、証明は (ii), (iii) については、補題1と、Jacobson-Morozov の補題を用いてなされる。(i) については、残念ながら case by case でしか証明ができていない。

Remark: ① 補題2で、normal type という仮定ははずせない。実際、normal type でない局所対称空間 $\mathfrak{p}$ であって、$\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}=\phi$ かつ $\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}=\phi$ となる例がある。
② $\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})$ が各々、単一 G-軌道であったのに対し、一般に $\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$, $\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$ は（空でなければ）いくつかの K-軌道に分解する。実際、$\mathfrak{g}$ が B_ℓ, C_ℓ, F_4, G_2 型のいずれかで、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ が normal type の Cartan 分解のときには、$\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$ は少なくとも 2つの K-軌道に分かれることが、後に示される。

補題3 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を normal type の Cartan 分解とする。$X\in\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$ について、X における $G.X$ への（$\mathfrak{g}$ 内での）transversal slice $S_X=X+N_X$ が存在して、次を満たす：

(i) $\mathcal{S}_X$ は $(-\theta)$-stable，ここに $(-\theta)$ は，Cartan involution θ に負符号をつけたもの。

(ii) $\dim N_X \cap \mathfrak{k} = \operatorname{codim}_{\mathcal{S}_X} (\mathcal{S}_X \cap \mathfrak{p}) = 1$

(iii) $\mathcal{S}_X \cap \mathfrak{p}$ は，X における $K \cdot X$ への（$\mathfrak{p}$ 内での）transversal slice を与える。

(iv) $\mathcal{S}_X$ 内に座標系 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, \mu)$ がとれて，

$(-\theta)|_{\mathcal{S}_X} : (\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, \mu) \mapsto (\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, -\mu)$

とできる。ここに $\dim \mathcal{S}_X = \ell + 2$。

この補題3が symmetry を説明する Key point になる。証明は補題2を用いる。

§3. subregular singularities in $\mathfrak{p}$

この節を通じて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は normal type の Cartan 分解とする。θ を Cartan involution とする。normal type の定義から，Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{p}$ 内にとれるので，そのようにとって1つ固定する。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ についての Weyl 群を W とする。$\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}/W$ を invariant morphism とし，χ の $\mathfrak{p}$ への制限も同一の記号で表わす：$\chi : \mathfrak{p} \to \mathfrak{h}/W$。

我々の主定理は次の3つである。

定理1　次のような $X \in N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ が存在する：補題3をみたす transversal slice $\mathcal{S}_X$ をとるとき，$(-\theta)|_{\mathcal{S}_X} : (\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, \mu) \mapsto (\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, -\mu)$ は，「リスト」にある

$\mathfrak{g}$に対応する型の versal deformation の symmetry $y \leftrightarrow z$（$\mathfrak{g}$がA_l型のとき），$z \leftrightarrow -z$（$\mathfrak{g}$が$B_l \sim G_2$型のとき）を，各 fiber $\chi_{S_X}^{-1}(\xi)$ 上でひきおこす。ここで，ξは$\mathfrak{t}/W$の元で，χ_{S_X}はχのS_Xへの制限とする。

定理2 $\mathfrak{g}$が B_l, C_l, F_4, G_2 型のいずれかとする。このとき，定理1のXとは，相異なるK-軌道に属する$Y \in \mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$が存在して，次をみたす：定理1のように transversal slice S_Y をとるとき，$(-\theta)|_{S_Y} : (\lambda_1, \cdots, \lambda_{l+1}, \mu) \mapsto (\lambda_1, \cdots, \lambda_{l+1}, -\mu)$ は，「リスト」にある$\mathfrak{g}$に対応する型の versal deformation の symmetry $x \leftrightarrow -x$（B_l, F_4型），$y \leftrightarrow -y$（C_l型），$x \leftrightarrow y$（G_2型）を，各 fiber $\chi_{S_Y}^{-1}(\xi)$ 上でひきおこす。

これらの定理の証明には，補題3および，Slodowy [11]，Bala-Carter [4]，Elkington [6] の結果を用いる。また，$\mathfrak{p}$が$(-\theta)$の fixed point set であることから，容易に次の結果を得る（定理1,2の系として）。

定理3 次のような$X \in \mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$が存在する：$X$における（$\mathfrak{p}$内での）$K \cdot X$への transversal slice $\tilde{S}_X$ を適当にとり，invariant morphism $\chi : \mathfrak{p} \to \mathfrak{t}/W$ の制限 $\chi|_{\tilde{S}_X}$ を $\chi_{\tilde{S}_X}$ と書くとき，$\xi \in \mathfrak{t}/W$ に対し，$\chi_{\tilde{S}_X}^{-1}(\xi)$ は，次の曲線特異点の versal deformation と biholomorphic である：（左に$\mathfrak{g}$の型を書く）

A_l : $x^{l+1} + y^2 + \xi_2 x^{l-1} + \cdots + \xi_l x + \xi_{l+1} = 0$

B_ℓ : ① $x^{2\ell}+y^2+\xi_2 x^{2\ell-2}+\xi_4 x^{2\ell-4}+\cdots+\xi_{2\ell-2}x^2+\xi_{2\ell}=0$

② $y^2+z^2+\xi_{2\ell}=0$

C_ℓ : ① $x^\ell+xy^2+\xi_2 x^{\ell-1}+\cdots+\xi_{2\ell-2}x+\xi_{2\ell}=0$

② $x^\ell+z^2+\xi_2 x^{\ell-1}+\cdots+\xi_{2\ell-2}x+\xi_{2\ell}=0$

D_ℓ : $x^{\ell-1}+xy^2+\xi_2 x^{\ell-2}+\cdots+\xi_{2\ell-4}x+\xi_{2\ell-2}+\xi_\ell' y=0$

E_6 : $x^4+y^3+\xi_2 x^2y+\xi_5 xy+\xi_6 x^2+\xi_8 y+\xi_9 x+\xi_{12}=0$

E_7 : $x^3y+y^3+\xi_2 x^4+\xi_6 x^3+\xi_8 xy+\xi_{10}x^2+\xi_{12}y+\xi_{14}x+\xi_{18}=0$

E_8 : $x^5+y^3+\xi_2 x^3y+\xi_8 x^2y+\xi_{12}x^3+\xi_{14}xy+\xi_{18}x^2+\xi_{20}y+\xi_{24}x+\xi_{30}=0$

F_4 : ① $x^4+y^3+\xi_2 x^2y+\xi_6 x^2+\xi_8 y+\xi_{12}=0$

② $y^3+z^2+\xi_8 y+\xi_{12}=0$

G_2 : ① $x^3+y^3+\xi_2 xy+\xi_6=0$

② $x^3+z^2+\xi_2 x^2+\xi_6=0$

注目すべきは、normal type の局所対称空間$\mathfrak{p}$（Kの作用の下で）での Brieskorn - Slodowy 理論に類似のものを考えると、曲線の特異点とそのversal deformation が得られるということである。さらに、$\mathfrak{g}$が B_ℓ, C_ℓ, F_4, G_2 型のときには、subregular nilpotent element のとり方により少なくとも２つの曲線特異点が生ずることである。実際、これら２つ（①，② で表示）の Milnor 数は異なるので、biholomorphic な変数変換では互いに移れなくて、このことから、少なくとも２つの subregular nilpotent K-orbit が$\mathfrak{p}$内に存

在することが結論されるのである。

§4．予想と展望

定理３は、Lie環でのBrieskorn-Slodowyの定理に比べると若干弱い形であるが、その原因は、$\mathfrak{p}$におけるnilpotent K-軌道の構造論が、1980年7月現在不備なことによる。次のことは、多分正しいと予想され、これらが確認されれば、定理３は、もっと強い形にできるはずである。

予想 $\mathfrak{g}$を複素単純Lie環，Gを$\mathfrak{g}$のadjoint group，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$をnormal typeのCartan分解，$K$を$\mathfrak{k}$に対応する$G$のanalytic subgroupとする。このとき、

(i) 任意の$X\in N(\mathfrak{g})$について、$G.X\cap\mathfrak{p}\neq\phi$

(ii) $\mathfrak{g}$がA_ℓ, D_ℓ, E_ℓ型のときには、(i)の$G.X\cap\mathfrak{p}$は単一のK-軌道からなる。

(iii) $\mathfrak{g}$が、$B_\ell, C_\ell, D_\ell, G_2$型のときには、

① $N_{r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$は単一のK-軌道からなる。

② $N_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$は、2個のK-軌道からなる。

Remark：予想(i)は、$\mathfrak{g}$がA_ℓ型のときには、正しい。

さて、versal deformation（「リスト」）のsymmetryという概念は、現段階では熟したものとは言いがたいが、もしも、うまく定式化できて、かつ“同値”の概念がうまく定義できれば、symmetryの“同値類”と、$N_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$内のK-

軌道は、1対1，onto に対応すると考えられる。予想が正しければ、定理1，2の symmetry 以外には、symmetry の"同値類"は存在しないと考えられる。

また、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が normal type でない Cartan 分解の場合には、"$\mathfrak{p}$内の subregular nilpotent element" をいかに定義するかは考慮の余地があるが（一般に $N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} = \phi$）、「nilpotent K-軌道の中で、二番目に generic なもの」ととらえれば、次の例がある。$\mathfrak{p}$が、複素化された対称空間 $SO(n+1, \mathbb{C}) / SO(n, \mathbb{C}) \oplus SO(1, \mathbb{C})$ 【Cartan のリストでは BDI 型 rank 1 の場合 cf. Helgason [7]】に対応するとき、"subregular singularity" としては、$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ という $(n-1)$ 次元超曲面を得る。その他にも、もう1つ、多変数の特異点の例が知られている。このように、局所対称空間での Brieskorn-Slodowy 理論では、特異点を有理二重点（これは2次元）として把えることは多分不適で（normal type のときには、すでに1次元になった！）、代わりに、V.I. Arnol'd が提起した単純特異点（これは多変数でも同様に定義できる。cf. [1]）という形で把えるべきではないかと思われる。これについて言えば、B_l, C_l, F_4 (G_2) 型での現象は、Arnol'd の最近の論文 [2], [3] と関連しているように思える。

参考文献

[1] V. I. Arnol'd : Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities (Functional Analysis and its Application, Vol. 6, 1972, pp. 254-272)

[2] V. I. Arnol'd : Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k, C_k and F_4 and singularities of evolutes (Russian Mathematical Surveys, Vol. 33, 1978, pp. 99-116 (No. 5))

[3] V. I. Arnol'd : Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. (Russian Math. Surveys, Vol. 34, 1979, pp. 1-42 (No. 2))

[4] P. Bala and R. W. Carter : Classes of unipotent elements in simple algebraic groups I, II (Math. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 79, 1976, pp. 401-425 ; Vol. 80, 1976, pp. 1-18).

[5] E. Brieskorn : Singular elements of semi-

simple algebraic groups (Actes, Congrès intern. Math. 1970. Tome 2, pp. 279-284).

[6] G. B. Elkington : The centralizers of unipotent elements in semisimple algebraic groups (Journal of Algebra Vol. 23, 1972, pp. 137-163)

[7] S. Helgason : Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. (Academic Press)

[8] B. Kostant : The principal three-dimensional subgroups and the Betti numbers of a complex simple Lie group (Amer. J. Math. Vol. 81, 1959, pp. 973-1032).

[9] B. Kostant : Lie group representations on polynomial rings (Amer. J. Math. Vol. 85, 1963, pp. 327-404)

[10] B. Kostant and S. Rallis : Orbits and representations associated with symmetric spaces (Amer. J. Math., Vol. 93, 1971, pp. 753-809)

[11] P. Slodowy : Einfache Singularitäten und einfache algebraishe Gruppen (Regensburger Math. Schriften 2, 1978)

[12] R. Steinberg : Conjugacy classes in Algebraic Groups (Lecture Note in Math. No. 366 , Springer-Verlag)

[13] E. B. Dynkin : Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras (Amer. Math. Soc. Trans. (2) , Vol. 6 , 1957 , pp. 111 - 244)

以 上。

1980年 7月。